УРАЛЬСКИЙ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (Ф)
АКАДЕМИИ ТРУДА И СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ Г. МОСКВА

СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

2019

Сборник практических занятий состоит из пояснительной записки, описания практических занятий, которые снабжены общими теоретическими сведениями, контрольными вопросами и заданиями в соответствии с программой и списка рекомендуемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Сборник практических занятий составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины «Элементы высшей математики»

Практические занятия занимают важное место при изучении дисциплины «Элементы высшей математики». Цель выполнения работ – формирование навыков решения математических задач при помощи различных методов.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и методы линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа и комплексных чисел;

уметь:

- производить операции над матрицами и определителями;
- решать системы линейных уравнений;
- производить действия с векторами;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- вычислять производные и дифференциалы, неопределенные и определенные интегралы;
- вычислять сумму числовых рядов и исследовать на сходимость числовые ряды;

Сборник состоит из пояснительной записки, описания практических занятий, которые снабжены общими теоретическими сведениями, контрольными вопросами и заданиями в соответствии с программой и списка рекомендуемой литературы.

На выполнение каждой работы отводится определенное количество часов в соответствии с тематическим планом.

Форма отчетности указана для каждого занятия.

Выполнять задания рекомендуется в отдельных тетрадях.

Практическое занятие №1

Тема: Операции над матрицами. Вычисление определителей

Цель: Формирование навыков выполнения операций над матрицами и вычисления определителей второго, третьего и четвертого порядков.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Прямоугольная матрица A размера $m\times n$ ($m\times n$-матрица) имеет вид таблицы, состоящей из m строк и n столбцов:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы a_{ij} находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$.

У *нулевой* матрицы 0 все элементы равны нулю:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица – столбец ($m\times 1$-матрица) состоит из одного столбца:

$$\underset{(m\times 1)}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

а *матрица – строка* ($1\times n$-матрица) из одной строки:

$$\underset{(1\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Произведением двух матриц A и B называется матрица C, каждый элемент которой определяется по правилу *строка на столбец*, то есть элемент стоки матрицы A умножается на элемент столбца матрицы B стоящие на соответствующих местах.

Из определения произведения матриц следует, что не любые две матрицы можно перемножать. Произведение AB имеет смысл только тогда, когда число столбцов первой матрицы-сомножителя равно числу строк второй матрицы-сомножителя, что символически записывается так:

$$(m\times k)\cdot(k\times n) = (m\times n).$$

Транспонирование $m\times n$-матрицы заключается в замене строк столбцами, а столбцов – строками с теми же номерами:

$$\underset{(n\times m)}{A}^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C = (c_{ij})$ размера $m\times n$ называется *суммой* двух $m\times n$-матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, если каждый элемент матрицы C равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = \underset{(m\times n)}{A + B} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Определителем второго порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}. \qquad (1)$$

Числа $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ называются *элементами* определителя; при этом элементы a_{11} и a_{22} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{12} и a_{21} - *побочную диагональ*. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \qquad (2)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Таким образом, каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: со знаком «плюс» – члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «минус» – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.

Указанное правило, называется *правилом треугольников*.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель D_{n-1}, полученный из D_n вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой – либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(разложение определителя по элементам i-ой строки) или

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

(разложение определителя по элементам j-го столбца).

В частности, для определителя третьего порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

что совпадает с результатом, полученным по формуле (2).

Примеры

<u>Задание 1:</u> Найти сумму и разность матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ и

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u> Здесь даны матрицы одного размера 3×2, следовательно, существуют их сумма и разность. Согласно определению алгебраической суммы матриц имеем

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & -1+5 \\ 3+2 & 0-3 \\ -5+0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-7 & -1-5 \\ 3-2 & 0-(-3) \\ -5-0 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

<u>Задание 2:</u> Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение: 1) По формуле (1) находим $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2\cdot 8 - 7\cdot 3 = -37$.

2) Разлагая данный определитель, например, по элементам первой строки, находим

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (-4)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 28 - 4\cdot(-46) + 1\cdot(-22) = 218.$$

Тот же результат получится, если воспользоваться формулой (2):

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6 + (-1)\cdot(-2)\cdot 1 + 4\cdot 5\cdot 8 - 8\cdot 3\cdot 1 -$$

$$- 2\cdot 5\cdot(-2) - 4\cdot(-1)\cdot 6 = 218.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Транспонируйте матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -7 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Укажите размеры данной и транспонированной матриц.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Произведите указанные действия, а в случае, когда это невозможно, указать причину: 1) $2A - B$;

   2) $A^T + 4B$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

   Найдите матрицу $C = A \cdot B$.
5. Вычислите определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -\sqrt{a} & a \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$.

6. Вычислите определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется матрицей? Как установить размеры матрицы?
2. Назовите линейные операции над матрицами. Как они производятся?
3. Какие матрицы можно перемножать? Как это делается?
4. Что называется определителем? Как вычисляются определители второго и третьего порядков?
5. Что называется минором и алгебраическим дополнением для произвольного элемента a_{ij} определителя?

Практическое занятие №2

Тема: Решение систем алгебраических уравнений по правилу Крамера

Цель: Формирование навыков решения СЛАУ по правилу Крамера и матричным методом.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Пример

<u>Задание:</u> Показать, что система имеет единственное решение и найти его по правилу Крамера.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 13 \\ 4x + 7y \quad = -13 \\ -x - 2y + 5z = 4 \end{cases}$$

<u>Решение:</u> Данная система имеет размер 3×3 (три уравнения и три неизвестных). Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица A квадратная (3×3).

Вычислим определитель матрицы Δ, используя формулу его разложения по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 35 + (-3) \cdot (-20) + 1 \cdot (-1) = 129.$$

Так как определитель системы $\Delta = 129 \neq 0$, то данная система имеет единственное решение. Это решение можно найти по правилу Крамера: $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, где $\Delta=129$ - главный определитель системы; Δ_x, Δ_y, Δ_z - вспомогательные определители, которые получаются из главного путем замены соответствующего столбца на столбец свободных членов, и вычисляются аналогично определителю Δ.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}13 & -3 & 1\\ -13 & 7 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=13\cdot 7\cdot 5+(-3)\cdot 0\cdot 4+1\cdot(-13)\cdot(-2)-$$

$$-1\cdot 7\cdot 4-(-3)\cdot(-13)\cdot 5-13\cdot 0\cdot(-2)=455+26-28-195=258;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 13 & 1\\ 4 & -13 & 0\\ -1 & 4 & 5\end{vmatrix}=2\cdot(-13)\cdot 5+13\cdot 0\cdot(-1)+1\cdot 4\cdot 4-$$

$$-1\cdot(-13)\cdot(-1)-13\cdot 4\cdot 5-2\cdot 0\cdot 4=-130+16-13-260=-387;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & -3 & 13\\ 4 & 7 & -13\\ -1 & -2 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 7\cdot 4+(-3)\cdot(-13)\cdot(-1)+13\cdot 4\cdot(-2)-$$

$$-13\cdot 7\cdot(-1)-(-3)\cdot 4\cdot 4-2\cdot(-13)\cdot(-2)=56-39-104+91+$$

$$+48-52=0.$$

Отсюда по правилу Крамера имеем:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{258}{129}=2; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-387}{129}=-3;$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{0}{129}=0.$$

Решение системы единственно, это совокупность чисел $(2;\,-3;\,0)$.

<u>Проверка:</u> Подставим найденное решение во все уравнения исходной системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot(-3)+1\cdot 0=13 \\ 4\cdot 2+7\cdot(-3)=-13 \\ -1\cdot 2-2\cdot(-3)+5\cdot 0=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13=13 \\ -13=-13 \\ 4=4 \end{cases}$$

Так как все уравнения системы обратились в равенства, то решение найдено верно.

О т в е т: $(2;-3\ 0)$.

Задания для самостоятельной работы

Показать, что система линейных уравнений имеет единственное решение по правилу Крамера;

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется решение СЛАУ?
2. Какие случаи могут представиться при решении СЛАУ?
3. Какие СЛАУ называются совместными, несовместными?
4. Напишите формулу Крамера. В каком случае они применимы?
5. При каком условии СЛАУ имеет единственное решение?
6. Что можно сказать о СЛАУ, если ее определитель равен нулю?

Практическое занятие №3

Тема: Решение систем алгебраических уравнений методом Гаусса

Цель: Формирование навыков решения СЛАУ методом Гаусса
На выполнение практической работы отводится 2 часа.
Требования к выполнению практической работы:
1.Ответить на теоретические вопросы.
2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Задачи, посвященные решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом исключения неизвестных для случая, когда СЛАУ имеет бесконечное множество решений (совместная неопределенная СЛАУ). При решении системы предлагается использовать одну из равносильностей *метода исключения неизвестных – метод Жордана – Гаусса* или *метода полного исключения*.

В процессе решения система преобразуется в равносильные (эквивалентные) системы, то есть СЛАУ с тем же множеством решений.

К *элементарным преобразованиям*, сохраняющим равносильность СЛАУ, относятся следующие преобразования:

1. смена мест уравнений СЛАУ;
2. отбрасывание одного из двух одинаковых уравнений СЛАУ;
3. умножение обеих частей какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;
4. замена одного из уравнений СЛАУ уравнением, полученным его почленным сложением с другим уравнением СЛАУ.

Сущность метода исключения состоит в том, что с помощью указанных элементарных преобразований, не нарушающих равносильности СЛАУ, выбранное неизвестное (ведущее) исключается из всех уравнений системы, кроме одного (ведущего уравнения). Метод осуществляется по шагам. На каждом шаге исключается только одно неизвестное. Шаги заканчиваются, когда ведущим побывают все уравнения системы (либо будет получено очевидное противоречие, говорящее об отсутствии решений СЛАУ).

Пример

<u>Задание:</u> Пользуясь методом исключения неизвестных найти общее решение системы линейных уравнений, а также два частных ее решения, одно из которых базисное:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 + 16x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 19x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -8 \end{cases}$$

<u>Решение:</u> Система имеет размер 3×4 (три уравнения, четыре неизвестных). На каждом шаге выбираем одно ведущее уравнение и в нем одно ведущее неизвестное. *Ведущим каждое уравнение и каждое неизвестное могут быть только один раз*. На следующем шаге их за ведущие брать нельзя.

<u>Шаг первый</u>. Выберем в качестве ведущего уравнения первое, а в нем ведущее неизвестное x_3, так как коэффициент при x_3 равен единице, что упрощает вычисления.

Ведущее уравнение, то есть первое, оставляем без изменения. Исключим ведущее неизвестное x_3 из второго и третьего уравнений. Для этого нужно преобразовать эти уравнения к виду, когда коэффициенты при x_3 в них станут равными нулю.

Умножим обе части ведущего уравнения на число 7 и почленно сложим со вторым уравнением. Аналогично, умножим обе части ведущего уравнения на «-8» и почленно сложим с третьим уравнением. В итоге получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 + 16x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1 & \left| + I \cdot 7 \right. \\ -2x_1 - 19x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -8 & \left| + I \cdot (-8) \right. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 18x_1 - 5x_2 \quad + 38x_4 = -48 \\ -18x_1 + 5x_2 \quad - 38x_4 = 48 \end{cases} \Rightarrow$$

Теперь переменная x_3 содержится только в первом уравнении. Заметим также, что два последних уравнения станут одинаковыми, если в одном из них поменять знаки. Поэтому, отбросим одно из этих уравнений, например, третье.

<u>Шаг второй</u>. Выберем в качестве ведущего второе (другое) уравнение. Так как в нем нет неизвестного с коэффициентом 1, то берем любое неизвестное, с коэффициентом, отличным от нуля, и делим обе части нового ведущего уравнения на этот коэффициент. Например, выберем во втором уравнении в качестве ведущего неизвестное x_2, с коэффициентом «-5», и поделим обе части этого уравнения на «-5»:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 & \left| + II \cdot 3 \right. \\ -3{,}6x_1 + x_2 \quad - 7{,}6x_4 = 9{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

Чтобы исключить x_2 из первого уравнения, умножим обе части ведущего (второго) уравнения на 3 и почленно сложим с первым. Ведущее уравнение перепишем без изменения.

$$\Rightarrow \begin{cases} -8{,}8x_1 \quad + x_3 - 17{,}8x_4 = 21{,}8 \\ -3{,}6x_1 + x_2 \quad - 7{,}6x_4 = 9{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

Ведущая переменная содержится теперь только во втором (ведущем) уравнении. Так как все уравнения уже были ведущими (каждое на своем шаге), то преобразования закончены.

Выразим из каждого уравнения то неизвестное, которое было в нем ведущим, и поэтому, не содержится в других уравнениях:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8x_1 + 17{,}8x_4 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6x_1 + 7{,}6x_4 \end{cases}.$$

Получено общее решение данной системы. Переменные x_2 и x_3, которые мы выразили, называются *базисными*. Остальные переменные x_1 и x_4 - называются *свободными*, они задаются произвольно (свободно)

Общее решение СЛАУ представляет собой такую запись СЛАУ, когда часть ее переменных, называемых базисными, выражены через оставшиеся переменные, называемые свободными.

Частные решения СЛАУ могут быть получены из общего решения. Для этого задаем произвольно свободные переменные и вычисляем базисные по общему решению.

Например, пусть $x_1 = 1$; $x_4 = -2$. Тогда

$$\begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8 \cdot 1 + 17{,}8 \cdot (-2) = 30{,}6 - 35{,}6 = -5 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6 \cdot 1 + 7{,}6 \cdot (-2) = 13{,}2 - 15{,}2 = -2 \end{cases}.$$

Таким образом, получено частное решение системы: $(1; -2; -5; -2)$. Придавая свободным переменным x_1 и x_4 другие значения, найдем, аналогичным образом, любое количество частных решений СЛАУ.

Базисное решение СЛАУ, это такое частное решение, когда свободные переменные равны нулю, то есть $x_1 = 0$; $x_4 = 0$, тогда $\begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8 \cdot 0 + 17{,}8 \cdot 0 = 21{,}8 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6 \cdot 0 + 7{,}6 \cdot 0 = 9{,}6 \end{cases}$. Получено базисное решение системы: $(0;\ 9{,}6;\ 21{,}8;\ 0)$.

<u>Проверка:</u> Проверим правильность нахождения двух частных решений, из которых базисное, подстановкой в исходную систему.

1) Проверяем решение $(1;\ -2;\ -5;\ -2)$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + (-5) + 5 \cdot (-2) = 2 + 6 - 5 - 10 = -7 \\ 4 \cdot 1 + 16 \cdot (-2) - 7 \cdot (-5) + 3 \cdot (-2) = 4 - 32 + 35 - 6 = 1 \\ -2 \cdot 1 - 19 \cdot (-2) + 8 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -2 + 38 - 40 - 4 = -8 \end{cases}$$

таким образом, все уравнения СЛАУ выполняются.

2) Проверим решение $(0;\ 9{,}6;\ 21{,}8;\ 0)$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 9{,}6 + 21{,}8 + 5 \cdot 0 = -28{,}8 + 21{,}8 = -7 \\ 4 \cdot 0 + 16 \cdot 9{,}6 - 7 \cdot 21{,}8 + 3 \cdot 0 = 153{,}6 - 152{,}6 = 1 \\ -2 \cdot 0 - 19 \cdot 9{,}6 + 8 \cdot 21{,}8 + 2 \cdot 0 = -182{,}4 + 174{,}4 = -8 \end{cases}.$$

Решение удовлетворяет всем уравнениям исходной СЛАУ.

Ответ: $\begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8x_1 + 17{,}8x_4 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6x_1 + 7{,}6x_4 \end{cases}$ - общее решение СЛАУ,

$(1;\ -2;\ -5;\ -2)$ - частное решение СЛАУ,

$(0;\ 9{,}6;\ 21{,}8;\ 0)$ - базисное решение СЛАУ.

Задания для самостоятельной работы

Пользуясь методом исключения неизвестных, найти общее решение системы линейных уравнений, а также два частных ее решения, одно из которых базисное.

$$\begin{cases} -x-y-2z+t=9 \\ y+2z+3t=5 \\ x+3y+6z+5t=1 \end{cases}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение эквивалентных (равносильных) СЛАУ.
2. Назовите элементарные преобразования, не нарушающие равносильности СЛАУ.
3. В чем состоит сущность метода Жордана – Гаусса для решения СЛАУ? Как осуществляется этот метод? Когда он применим?
4. Что называется общим решение СЛАУ?
5. Какие переменные называются базисными, а какие свободными?
6. Как найти частное решение СЛАУ? Сколько частных решений имеет СЛАУ?
7. Что называется базисным решением СЛАУ? Сколько базисных решений имеет СЛАУ?

Практическое занятие №4
Тема: Операции над векторами. Вычисление модуля и скалярного произведения

Цель: Формирование навыков выполнения операций над векторами и вычисления модуля и скалярного произведения векторов.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Отрезок называется *направленным*, если один из его концов считается началом отрезка, а другой – его концом.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор, заданной парой $(A; B)$ несовпадающих точек, обозначается символом $\overline{AB}$. Точка A называется *началом*, а точка B - *концом* вектора.

Расстояние $|\overline{AB}|$ называется диной (модулем) вектора $\overline{AB}$.

Вектор $\overline{AA}$, концы которого совпадают, называется *нулевым вектором*. Длина нулевого вектора равна нулю.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}\right)$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ выражается *через* их *координаты* по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Угол между двумя векторами $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ находится по формуле $\cos\left(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}\right) = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

Если отрезок AB разделен точкой C в отношении $AC : CB = \lambda$, то координаты точки C находятся по формулам

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \; y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}.$$

Если $\lambda = 1$, то получаются формулы для нахождения координат середины отрезка:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \; y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Пример

<u>Задание:</u> *Отрезок, концы которого A(-11;1) и B(9;11), разделен в отношении 2:3:5 (от A к B). Найти точки деления.*

<u>Решение:</u> *Обозначим точки деления от A к B через C и D. По условию* $x_A = -11$, $x_B = 9$, $y_A = 1$, $y_B = 11$ *и AC:CD:DB=2:3:5. тогда C делит AB в отношении* $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{2}{3+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$*; значит* $x_C = \frac{-11 + \left(\frac{1}{4}\right)\cdot 9}{1+\frac{1}{4}} = -7$*;*

$y_C = \frac{1 + \left(\frac{1}{4}\right)\cdot 11}{1+\frac{1}{4}} = 3$*; таким образом точка C имеет координаты (-7;3).*

Точка D служит серединой AB, поэтому $x_D = \frac{-11+9}{2} = -1$*;* $y_D = \frac{1+11}{2} = 6$. *Тогда D(-1;6).*

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите координаты вектора AB, если $A(-2;-3)$, $B(1;4)$.
2. Точка $C(2;3)$ делит AB в отношении 1:4 (от A к B). Найдите точку A, если B(-6;-1).
3. Найдите точку M, равноудаленную от осей координат и от данной точки A(4;-2).
4. Вычислите угол между векторами $\bar{a} = (-3;4)$ и $\bar{b} = (4;3)$.
5. Даны векторы $\bar{a} = (2;3;-1)$, $\bar{b} = (0;1;4)$ и $\bar{c} = (1;0;-3)$. Определите координаты вектора: а) $2a - b - 2c$;
   б) $a - b - 3c$.
6. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a} = (2;4)$ и $\bar{b} = (4;1)$.
7. Вычислите k и l, если:
   1) $3i + 5j = ki + (2l+1)\cdot j$;
   2) $(k + l - 1)\cdot i = (2k - l)\cdot j$;
   3) $(2k - l - 1)\cdot i - (3k + l + 10)\cdot j = 0$;
   4) $ki + lj = (l+1)\cdot i - (k-1)\cdot j$.
8. Найдите скалярное произведение векторов:

1) $i-2j+k$ и $2i+k$;
2) $2j+3k$ и $i-j-2k$;
3) $2i-j-k$ и $4i-3j+5k$;
4) $6i+4k$ и $2i-j$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение вектора.
2. Что понимается под длиной или модулем вектора?
3. Какие векторы называются коллинеарными?
4. Что мы понимаем под произведением вектора на число?
5. Что называется суммой векторов? Какие правила нахождения сумм векторов существуют?
6. Что называется разностью двух векторов? Как построить разность двух векторов?
7. Дайте определение скалярного произведения двух векторов?
8. По какой формуле вычисляется скалярное произведение в координатах?
9. По какой формуле вычисляется угол между двумя векторами в координатах?

Практическое занятие №5

Тема: Составление уравнений прямых и кривых второго порядка, их построение

Цель: Формирование навыков составления уравнений прямых и кривых второго порядка, их построения

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Уравнение первой степени относительно переменных x и y, то есть уравнение вида $Ax+By+C=0$ при условии, что коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением* прямой.

Уравнение вида $\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$ называется *векторным уравнением* прямой. Если его переписать в координатной форме, то получится уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Каноническое уравнение прямой записывается в следующем виде $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$, где m и n - координаты направляющего вектора прямой.

Уравнение прямой в отрезках на осях имеет вид $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, где a и b - соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y=kx+b$, где $k=tg\alpha$ - угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к оси Ox, а b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_A;y_A)$ *в заданном направлении*, имеет вид $y-y_A=k\cdot(x-x_A)$, где $k=tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_A;y_A)$ *и* $B(x_B;y_B)$, имеет вид $y-y_A=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\cdot(x-x_A)$. Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A и B, находится из соотношения $k_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, называемой центром.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r имеет вид $x^2+y^2=r^2$.

Уравнение окружности с центром в точке $O_1(a;b)$ и радиусом r имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Уравнение окружности в общем виде записывается так: $Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0$, где A, B, C и D - постоянные коэффициенты.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, большая расстояния между фокусами $(2c)$.

Уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$, где a - длина большей полуоси; b - длина малой полуоси.

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная $(2a)$, меньшая расстояния между фокусами $(2c)$.

Уравнение гиперболы, фокусы которого лежат на оси Ox, имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a - длина действительной полуоси; b - длина мнимой полуоси.

Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Ox и ветви направлены вверх, имеет вид $x^2=2py$, где $p>0$ (параметр параболы) – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение ее директрисы $y=-\frac{p}{2}$.

Пример

<u>Задание 1:</u> Построить прямую $3x+4y-12=0$.

<u>Решение:</u> Найдем точки пересечения прямой с осями Ox и Oy.

Пусть $x = 0 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3)$.

Пусть $y = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$.

Изобразим найденные точки на координатной плоскости и соединим их, таким образом, получим прямую заданную уравнением $3x + 4y - 12 = 0$ (рис. 1).

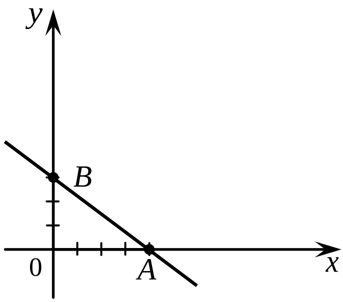


рис. 1

<u>Задание 2:</u> Построить прямую $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

<u>Решение:</u> Перепишем уравнение в виде: $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$, то есть $a = 2$ и $b = -3$. Таким образом, получаем точки $A(2; 0)$ и $B(0; -3)$, прямая проходящая через точки A и B является искомой (рис. 2).

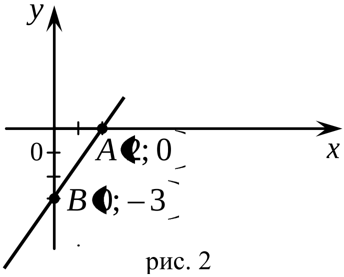


рис. 2

Задание 3: Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(2;3)$.

Решение: Вектор $OM=(2;3)$ коллинеарен искомой прямой. Для составления уравнения прямой используем каноническое уравнение прямой: $\frac{(x-x_0)}{m}=\frac{(y-y_0)}{n}$.

Таким образом, подставив в данное уравнение $m=2$, $n=3$, $x=0$, $y=0$ получим искомое уравнение прямой проходящей через начало координат и точку $M(2;3)$:

$$\frac{(x-0)}{2}=\frac{(y-0)}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow 3x-2y=0.$$

Задание 4: Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(3;-5)$ и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}=(4;2)$.

Решение: Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка искомой прямой. Вектор $M_0M=(x-3;\,y+5)$ перпендикулярен вектору $\vec{n}=(4;2)$. Так как векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{n}\cdot M_0M=0$. Записав произведение этих векторов в координатной форме, получим:

$$(4;2)\cdot(x-3;\,y+5)=0\Leftrightarrow 4\cdot(x-3)+2\cdot(y+5)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-12+2y+10=0\Leftrightarrow 4x+2y-2=0\Leftrightarrow 2x+y-1=0.$$

Уравнение искомой прямой имеет вид $2x+y-1=0$.

Задания для самостоятельной работы

1. Проверить принадлежат ли точки $A(3;14)$, $B(4;13)$, $C(-3;0)$ и $D(0;7)$ прямой $7x-3y+21=0$.
2. Построить прямые:

1) $x=4$; 2) $x=-3$; 3) $y=2$;

4) $2x-5y+10=0$; 5) $4x+6y-3=0$; 6) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$;

7) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{4}=1$; 8) $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$; 9) $-\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{3}=1$.

3. Построить фигуру, ограниченную линиями $x=-2$, $x=0$, $y=-3$ и $y=0$. Вычислить площадь этой фигуры.
4. Преобразуйте уравнения следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях:

   1) $3x-4y+2=0$; 2) $x+y-3=0$;

   3) $2x+3y+1=0$; 4) $2x+3y-6=0$;

   5) $3x-4y+12=0$.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(x; y)$: 1) $M(-4; -1)$; 2) $M(5; -4)$.
6. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}$:

   1) $M_0(-2; -3)$; $\vec{n}=(4; 5)$;

   2) $M_0(2; -1)$; $\vec{n}=(-3; 4)$.
7. Составить уравнение окружности, проходящей через точки:

   1) $A(3; 1)$, $B(-2; 6)$, $C(-5; -3)$;

   2) $A(2; 8)$, $B(4; -6)$, $C(-12; -6)$;

   3) $A(-2; -6)$, $B(-3; 1)$, $C(4; 2)$.
8. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках A и B, а фокусы в точках F_1 и F_2:

   1) $A(-5; 0)$, $B(5; 0)$, $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$;

   2) $A(0; -8)$, $B(0; 8)$, $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$;

   3) $A(0; -4)$, $B(0; 4)$, $F_1(0; -2)$, $F_2(0; 2)$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется общим уравнением прямой?
2. Какой вид имеет векторное уравнение прямой?

3. Какое уравнение называется каноническим уравнением прямой?
4. Запишите уравнение прямой в отрезках на осях и уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Какой вид имеют уравнения прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении и прямой, проходящей через две данные точки?
6. Что называется окружностью, эллипсом, гиперболой, параболой?

Практическое занятие №6

Тема: Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей

Цель: Формирование навыков вычисления пределов с помощью замечательных пределов, раскрытия неопределенностей

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Вычисление предела функции $f(x)$ следует начинать с подстановки предельного значения аргумента $x = a$, (a - число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$) в выражение, определяющее эту функцию. При этом приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

I. Если основная элементарная функция определена в предельной точке $x = a$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to a} x\right) = f(a)$.

Имеют место основные теоремы, на которых основано вычисление пределов элементарных функций.

1. Если C - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} C = C$.
2. Если C - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то:

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)},\quad \lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0.$$

II. Функция $f(x)$ в предельной точке $x=a$ не определена. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях (наиболее простых) вопрос сводится к применению теорем о свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда подстановка предельного значения аргумента в выражение для $f(x)$ приводит к одной из *неопределенностей*:

$$\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Тогда вычисление предела заключается в раскрытии полученных неопределенностей.

Здесь могут оказаться полезными:

первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, ($x$ - радианная мера угла);

второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Кроме того, при раскрытии неопределенностей используют следующие приемы:

1. сокращение дроби на критический множитель $(x-a)$ при $x \to a$;
2. избавление от иррациональности в числителе или знаменателе дроби;
3. разложение многочленов на линейные или квадратичные множители при $x \to a$, $(a \neq \infty)$.

Пример

Вычислить пределы:

Задание 1: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)$.

Решение: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}$, $4x-8=0$ при $x \to 2$, (на ноль делить нельзя). Таким образом, $4x-8=0$ есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\dfrac{1}{4x-8}$ - бесконечно большая. Поэтому при $x \to 2$ произведение $\dfrac{1}{4x-8}\cdot 5$ есть величина бесконечно большая, то есть $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(3x-2)}{x\cdot(2x-5)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2}{2x-5}=\dfrac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5}=\dfrac{-2}{-5}=\dfrac{2}{5}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\dfrac{x}{0}$; умножим числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-6x^2+5x-1\right)$; вынесем x^3 за скобки, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3\cdot\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$$

(при $x\to\infty$ $\frac{6}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ - бесконечно малые величины и их пределы равны нулю).

<u>Задание 2:</u> 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

<u>Решение:</u> 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; выполним преобразования и воспользуемся вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\left(\frac{x}{3}\right)\cdot 3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^x$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$; 11) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2z}{\sqrt{4+z}-\sqrt{4-z}}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{4x}\right)^x$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{-x}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется пределом функции?
2. Каким образом определяется число e?
3. Сформулируйте основные теоремы вычисления пределов.
4. Запишите формулы соответствующие первому и второму замечательным пределам.
5. Какие приемы используются при раскрытии неопределенностей?

Практическое занятие №7

Тема: Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва

Цель: Формирование навыков вычисления односторонних пределов, классификации точек разрыва

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если существует конечный предел функции в этой точке, который равен значению функции в точке $x = a$, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Примером непрерывной функции может служить любая элементарная функция, которая непрерывна в каждой точке своей области определения.

Точка $x = a$ называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$, если эта функции определена в некоторой окрестности точки $x = a$, но в самой точке $x = a$ не удовлетворяет условию непрерывности.

Точки разрыва функции делятся два типа. К *точкам разрыва I рода* относятся такие точки, в которых существуют конечные односторонние пределы: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (левый предел) и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (правый предел). К *точкам разрыва II рода* относятся те точки, в которых хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Заметим, что точки разрыва I рода подразделяются в свою очередь на *точки устранимого разрыва* (когда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$) и на *точки скачка* функции (когда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$); в последнем случае разность $f(a+0)-f(a-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Пример

Задание 1: Вычислите односторонние пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{4}{(x-2)^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение: 1) Пусть $x<2$. Тогда при $x\to 2-0$ функция $x-2$, а, следовательно, и $(x-2)^3$ есть отрицательная бесконечно малая, поэтому функция $4\cdot\dfrac{1}{(x-2)^3}$ - отрицательная бесконечно большая, то есть $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{4}{(x-2)^3}=-\infty$.

При $x\to 2+0$ функция $x-2$, а, следовательно, и $(x-2)^3$ - положительная бесконечно большая функция, то есть $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{4}{(x-2)^3}=+\infty$.

2) Пусть $x<1$. Тогда при $x\to 1-0$ имеем: $x-1$ - отрицательная бесконечно малая функция; следовательно, $\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$ и $2^{\frac{1}{x-1}}\to 0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1$.

Если $x>1$, то при $x\to 1+0$ получим: $x-1$ - положительная бесконечно малая функция; следовательно, $\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$ и $2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty$, тогда $\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}\to 0$. Имеем, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0$.

Задание 2: Даны функции: 1) $y=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$. Найти точки разрыва и исследовать их характер.

Решение: 1) Функция $y=\dfrac{1}{x+3}$ определена при всех значениях x, кроме $x=-3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения, состоящей из двух промежутков $(-\infty,-3)$ и $(-3,+\infty)$.

Следовательно, единственной точкой разрыва является точка $x=-3$ (функция определена в окрестности этой точки, в самой же точке нарушается условие непрерывности – функция в ней неопределена). Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы этой функции при стремлении аргумента к точке разрыва $x=-3$: $\lim\limits_{x\to-3+0}\dfrac{1}{x+3}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-3-0}\dfrac{1}{x+3}=-\infty$.

Следовательно, при $x=-3$ функция $y=\dfrac{1}{x+3}$ имеет бесконечный разрыв; $x=-3$ есть точка II рода.

2) Рассуждая аналогично, получим, что точкой разрыва заданной функции является $x=0$. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x=0$: $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$.

Таким образом, левый и правый пределы исследуемой функции при $x=0$ конечны, но не равны между собой. Поэтому $x=0$ точка I рода, причем точка скачка функции.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите односторонние пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{x+2}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5\pm 0}\dfrac{3-x}{(x-5)^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}\pm 0} tg2x$;

4) $\lim\limits_{x\to 3\pi\pm 0} ctg\dfrac{x}{3}$; 5) $\lim\limits_{x\to \pm 0}(5^x+5)$; 6) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{\lg(2-x)}{2-x}$.

2. Для данных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

1) $y=\dfrac{1}{2-x}$; 2) $y=\dfrac{1}{(x-5)^2}$; 3) $y=-\dfrac{2}{x^2-1}$;

4) $y=\dfrac{1}{4x-x^2-3}$; 5) $y=\dfrac{3}{2^x-1}$; 6) $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

3. Исследуйте на непрерывность функции:

1) $y=-5x$; 2) $v=2t^2$; 3) $y=x^2+2$;

4) $s=t^2-t$; 5) $y=x^3$; 6) $y=-x^3-1$;

7) $y=2x^3$; 8) $y=x^3-5$ в точке $x=1$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение непрерывной функции.
2. Что называется точкой разрыва?
3. На какие два типа делятся точки разрыва? Дайте определение.
4. Какие пределы называются односторонними?
5. Какая точка называется точкой устранимого разрыва?
6. Какая точка называется точкой скачка? Что называется скачком?

Практическое занятие №8
Тема: Вычисление производных функций по определению производной

Цель: Формирование навыков вычисления производных функций по определению производной

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x *(производной первого порядка)* называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел конечен, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x; в противном случае (то есть если он не существует или равен бесконечности) – *не дифференцируемой*. В том случае, когда предел есть бесконечность, говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке *бесконечную производную*.

Дифференциалом dy функции $y = f(x)$ *(дифференциалом первого порядка)* называется главная часть ее приращения, пропорциональная приращению Δx независимой переменной x.

Дифференциал dx независимой переменной x равен ее приращению Δx:

$$dx = \Delta x.$$

Дифференциал любой дифференцируемой функции $y = f(x)$ равен *произведению ее производной на дифференциал независимой переменной*:

$$dy = y'(x)dx. \qquad (1)$$

Соотношение (1) остается в силе и тогда, когда x есть функция другого аргумента – в этом заключается *инвариантность* формы первого дифференциала.

Из соотношения (1) получаем $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, то есть производная первого порядка функции $y=f(x)$ равна отношению первого дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента.

Пример

<u>Задание:</u> Пользуясь определением производной, найти производную и дифференциал функции $y=\sqrt{2x-1}$. Вычислить $y'(5)$.

<u>Решение:</u> Найдем приращение функции $y=\sqrt{2x-1}$, соответствующее данному приращению Δx аргумента x:

$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\sqrt{2(x+\Delta x)-1}-\sqrt{2x-1}$.

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1}-\sqrt{2x-1}}{\Delta x}$$

и

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1}-\sqrt{2x-1}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1}-\sqrt{2x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

По формуле (1) находим дифференциал функции:

$$dy=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx.$$

Подставляя в выражение для y' значение $x=5$, получим $y'(5)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 5-1}}=\frac{1}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите производные и дифференциалы от указанных функций, пользуясь непосредственно определением производной:
   1) $y=3x-5$; 2) $y=x^2-9$; 3) $y=x^2-4x+3$;
   4) $y=4x-x^3$; 5) $y=\sqrt{3x+1}$; 6) $y=\frac{1}{x-2}$;
   7) $y=\frac{1}{x^2+5}$; 8) $y=\sin x$; 9) $y=tg2x$.
2. Дана функция $f(x)=3x^2-4x+9$. Найти $f'(1)$.
3. Дана функция $f(x)=\sin 2x$. Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
4. Дана функция $f(x)=ctg\frac{x}{2}$. Найти $f'(x)$, а затем вычислить $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f'(\pi)$.
5. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Найти $f'\left(\frac{1}{8}\right)$, $f'(0)$.
6. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$.
7. Дана функция $\varphi(x)=\frac{8}{x}$. Показать, что $\varphi'(-2)=\varphi'(2)$.
8. Показать, что функция $y=|x|$ не дифференцируема в точке $x=0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение производной первого порядка.

2. Какая функция называется дифференцируемой? Какая функция называется не дифференцируемой?
3. Что называется дифференциалом первого порядка?
4. Сформулируйте определение дифференциала функции.
5. В чем заключается инвариантность формы первого дифференциала.
6. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.

Практическое занятие № 9

Тема: Вычисление производных сложных функций

Цель: Формирование навыков вычисления производных сложных функций

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Пусть $y = y(u)$ и $u = u(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = (u(x))$ есть также дифференцируемая функция, причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad (1)$$

Это правило распространяется на цепочку из любого количества дифференцируемых функций: *производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.*

Пример

Задание: Найдите производные функций:

1) $y = \ln\left(x^3 - 3x^2 + 4x\right)$; 2) $y = \cos^2 \dfrac{x}{6}$.

<u>Решение:</u> 1) Предположим, что $y = \ln u$, где $u = x^3 - 3x^2 + 4x$. Тогда по формуле (1) найдем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot \left(3x^2 - 6x + 4\right) = \frac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x}.$$

2) Предполагая, что $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = \dfrac{x}{6}$, получим

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot \left(-\sin v\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{6}\sin\frac{x}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить производные заданных функций:

1) $y = \sin\left(2x - 1\right)$; 2) $y = \left(5x + 2\right)^4$; 3) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

4) $y = \cos x^2$; 5) $y = arctg\left(3 - x^2\right)$; 6) $y = \sin arcctgx$;

7) $y = \dfrac{2}{\cos 5x}$; 8) $y = e^{2^x}$; 9) $y = \dfrac{\sin x^2}{x}$;

10) $y = arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 11) $y = \cos\dfrac{x}{x+1}$; 12) $y = \left(x - 2\right)\sqrt{x^2 + 1}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите правила нахождения производной функции.
3. Какие функции называются дифференцируемыми?
4. Какая функция называется сложной?
5. Как найти производную сложной функции?

Практическое занятие №10

Тема: Вычисление производных и дифференциалов высших порядков

Цель: Формирование навыков вычисления производных и дифференциалов высших порядков

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее первой производной: $y'' = (f'(x))'$.

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее второй производной: $y''' = (f''(x))'$.

Производная n – го порядка (*n – я* производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от ее *(n – 1) – ой* производной: $y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$.

Дифференциал второго порядка (второй дифференциал) функции $y = f(x)$ есть дифференциал от ее первого дифференциала: $d^2y = d(dy)$.

Дифференциал третьего порядка (третий дифференциал) функции $y = f(x)$ есть дифференциал от ее второго дифференциала: $d^3y = d(d^2y)$.

Дифференциал n – го порядка (*n – ый* дифференциал) функции $y = f(x)$ есть дифференциал от ее *(n – 1) – ого* дифференциала: $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Примеры

Задание 1: Найти y', y'', y''', …, если $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7$.

Решение: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$,

$y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{IV} = 120x + 48$, $y^{V} = 120$, $y^{VI} = y^{VII} = \ldots = 0$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производные второго порядка:

1) $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$;
2) $y = (2x+5)^3$;
3) $y = \dfrac{1}{x-1}$;
4) $y = -\dfrac{22}{x+5}$;
5) $y = \cos^2 x$;
6) $y = e^{-x^2}$;
7) $y = 5^{\sqrt{x}}$;
8) $y = x\sin 2x$;
9) $y = e^x \cos x$.

2. Дана функция $f(x) = \sin 3x$. Найти $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$.

3. Найти производные третьего порядка:

1) $y = \dfrac{x}{6\cdot(x+1)}$;
2) $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$;
3) $y = (2x+3)^3 \cdot \sqrt{2x+3}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется производной второго порядка?
2. Что называется производной n – *го* порядка?
3. Что называется дифференциалом функции?
4. Что называется дифференциалом второго порядка?
5. Что называется дифференциалом n – *го* порядка? По какой формуле он вычисляется?

Практическое занятие №11

Тема: Полное исследование функции. Построение графиков

Цель: Формирование навыков исследования функции и построения графиков

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Общая схема построения графиков функций

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
7. Построить график, используя полученные результаты исследования.

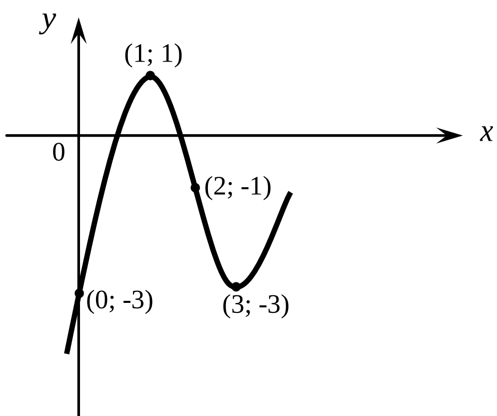
Пример

Построить график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Решение:

1. Функция определена на всей числовой оси, то есть $D(y) = R$.
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.

3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x=0$, получим $y=-3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.
4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
5. Найдем производную: $y'=3x^2-12x+9$. Далее, имеем $\left(3x^2-12x+9=0\right) \Leftrightarrow \left(x^2-4x+3=0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3. \end{array}\right.$ Точки $x=1$ и $x=3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty<x<1$, $1<x<3$ и $3<x<+\infty$. В промежутках $-\infty<x<1$ и $3<x<+\infty$ $y'>0$, то есть функция возрастает, а в промежутке $1<x<3$ $y'<0$, то есть функция убывает. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x=3$ - с минуса на плюс. Значит, $y_{\max}=y(1)=1$, $y_{\min}=y(3)=-3$.
6. Найдем вторую производную: $y''=6x-12$; $6x-12=0$, $x=2$. Точка $x=2$ делит область определения функция на два промежутка $-\infty<x<2$ и $2<x<+\infty$. В первом из них $y''<0$, а во втором $y''>0$, то есть в промежутке $-\infty<x<2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2<x<+\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получаем точку перегиба $(2;-1)$.
7. Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 1).



Задания для самостоятельной работы

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1) $y = 2x^2 - 8x$; 2) $y = -3x^2 + 12x$;
3) $y = x^2 + 5x + 4$; 4) $y = -x^2 + 2x + 15$;
5) $y = x^3 - 3x$; 6) $y = 3x^3 - x$;
7) $y = -x^3 + x$; 8) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$;
9) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$; 10) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;
11) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; 12) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение возрастания и убывания функции.
2. Дайте определение экстремума функции.
3. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции?
4. Сформулируйте определение асимптоты. Перечислите основные виды асимптот.
5. Сформулируйте общую схему исследования функции для построения графика.

Практическое занятие №12

Тема:Непосредственное интегрирование. Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле

Цель: Формирование навыков нахождения неопределенных интегралов методами замены переменной и по частям

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Проинтегрировать функцию $f(x)$ - значит найти ее неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании основных свойств неопределенного интеграла и таблицы простейших интегралов.

В основе интегрирования *способом подстановки* (или *замены переменной*) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u(x)$ - произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок следующих двух типов:

1) $x=\varphi(t)$ - где t - новая переменная, а $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной такова:
$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$
Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид;
2) $t=\psi(x)$, где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной имеет вид
$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(t)dt \qquad (2)$$

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле
$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (3)$$
где u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (3) отыскание интеграла $\int udv$ сводится к нахождению другого интеграла $\int vdu$, ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, при нахождении интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx,\quad \int P(x)\sin axdx,\quad \int P(x)\cos axdx$$

за u следует принять многочлен $P(x)$, а за dv - соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; при отыскании интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx,\quad \int P(x)\arcsin axdx,\quad \int P(x)\arccos axdx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv - выражение $P(x)dx$.

Примеры

Найти интегралы: 1) $\int \sin 3xdx$; 2) $\int (x-5)\cos xdx$.

Решение: 1) Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет находиться аргумент $3x$ подынтегральной функции $\sin 3x$. Так как $d(3x)=3dx$, то $\int \sin 3xdx=\frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x)$.

Следовательно, подстановка $3x=t$ приводит рассматриваемый интеграл к табличному: $\int \sin 3xdx=\frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x)=\frac{1}{3}\int \sin tdt=-\frac{1}{3}\cos t+C$.

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим $\int \sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

2) Предполагая $u=x-5$, $dv=\cos xdx$, найдем $du=dx$, $v=\int \cos xdx=\sin x$. Следовательно,

$$\int (x-5)\cos xdx=(x-5)\sin x-\int \sin xdx=(x-5)\sin x+\cos x+C.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти интегралы методом непосредственного интегрирования:

1) $\int x^7 dx$;
2) $\int \frac{dx}{x^5}$;
3) $\int (x^4 - 4x^3 + 2x)dx$;
4) $\int \frac{1-6x+4x^2}{x^2}dx$;
5) $\int \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx$;
6) $\int 7^x dx$;
7) $\int 8\cos x dx$;
8) $\int \frac{\sin x}{9}dx$;
9) $\int \frac{x^2-7}{9-x^2}dx$

Найти интегралы способом подстановки:

1) $\int \cos 5x dx$;
2) $\int (2x-5)^7 dx$;
3) $\int \sqrt{8x+9}dx$;
4) $\int \frac{dx}{6x+5}$;
5) $\int 6^{5x+2}dx$;
6) $\int e^{4-3x}dx$;
7) $\int \sin x\cos^2 x dx$;
8) $\int \frac{10x-3x^2}{x^3-5x^2}dx$;
9) $\int \cos^2 x dx$.

Найдите интегралы при помощи интегрирования по частям:

1) $\int (x-7)\sin x dx$;
2) $\int x^2 \cos x dx$;
3) $\int e^{2x}\cos x dx$;
4) $\int 4^x \sin x dx$;
5) $\int \sqrt{4+x^2}dx$;
6) $\int \cos\sqrt{x}dx$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется первообразной? Перечислите свойства первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?

4. Перечислите основные формулы интегрирования.
5. Какие методы интегрирования вы знаете? В чем заключается их сущность?

Практическое занятие №13

Тема: Вычисление определенных интегралов

Цель: Формирование навыков вычисления определенного интеграла при помощи формулы Ньютона – Лейбница

На выполнение работы отводится 2 часа

Требования к выполнению работы:

1. Ответить на теоретические вопросы.
2. Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Функция, $f(x)$ интегрируемая на промежутке $[a;b]$, если при любых разбиениях $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ промежутка $[a;b]$, таких, что $\Delta x = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$ при произвольном выборе точек ξ_k (где $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$), сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ при $n \to \infty$ стремится к пределу S.

Предел $S = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$ называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$, то есть $S = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Число a называется *нижним пределом* интеграла, b - *верхним*. Промежуток $[a;b]$ называется *промежутком интегрирования*, x - *переменной интегрирования*.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит *формула Ньютона –*

Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. То есть *определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

Примеры

Вычислить следующие определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x dx$; 2) $\int\limits_2^3 x^2 dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1)dx$.

Решение: 1) $\int\limits_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$;

2) $\int\limits_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{1}{3}\cdot(3^3 - 2^3) = \frac{19}{3}$;

3) $\int\limits_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]\Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2\right) -$

$-\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)\right) = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) =$

$= \frac{8}{3} + 6 + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{9}{3} + 6 = 3 + 6 = 9$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_2^3 x^3 dx$; 2) $\int\limits_1^{16} \sqrt{x}\,dx$; 3) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dx}{x^2}$;

4) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{dx}{x}$; 5) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx$ 6) $\int\limits_{-1}^1 (6x^2 - 2x - 5)dx$;

7) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x}dx$; 8) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$;

9) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{25-x^2}$; 10) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 11) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{x^2-2x+10}$;

12) $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^4-9}$; 13) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} ctg 2x dx$; 14) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3} xe^{3x}dx$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется интегральной суммой для функции на отрезке?
2. Дайте определение определенного интеграла.
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
4. В чем заключается суть формулы Ньютона – Лейбница?

Практическое занятие №15

Тема: Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов

Цель: Формирование навыков вычисления площадей фигур с помощью определенных интегралов

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Определенный интеграл широко применяется при вычислениях различных геометрических фигур и физических величин.

Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$ (рис. 1).

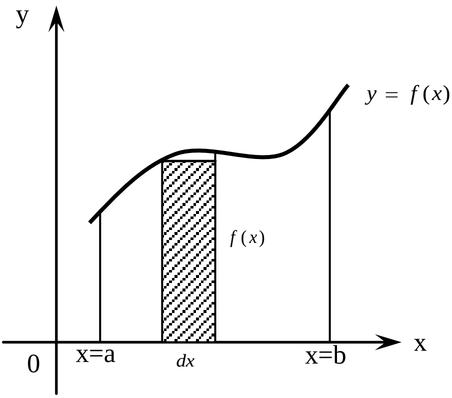


рис. 1

Так как дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, то есть $dS = f(x)dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b, получим

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси Oy так, что $c \le x \le d$, $x = \varphi(y) \ge 0$ (рис. 2), то дифференциал переменной площади S равен $dS = f(y)dy$, откуда

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy.$$

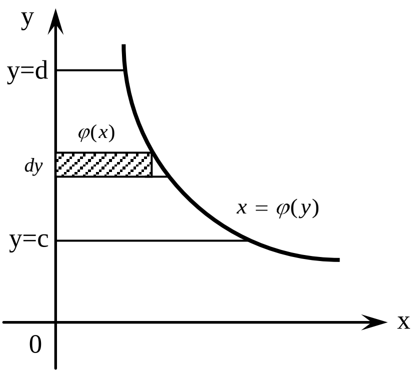


рис. 2

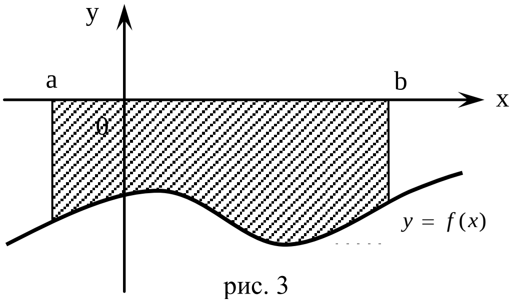


рис. 3

В том случае, когда

криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, лежит под осью Ox (рис.3), площадь находится по формуле $S=\int_a^b |f(x)|dx$.

Если фигура, ограниченная кривой $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, расположена по обе стороны от оси Ox (рис. 4), то $S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b |f(x)|dx$.

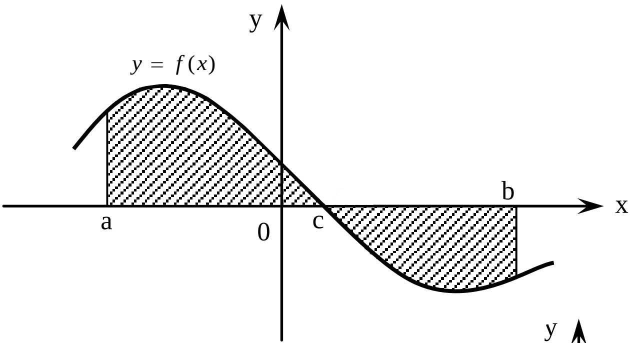


рис. 4

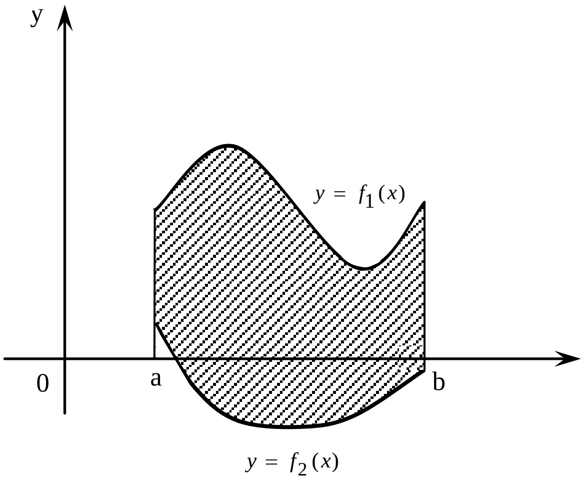


рис. 5

Пусть фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \le x \le b$ и $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис. 5). Тогда ее площадь находится по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

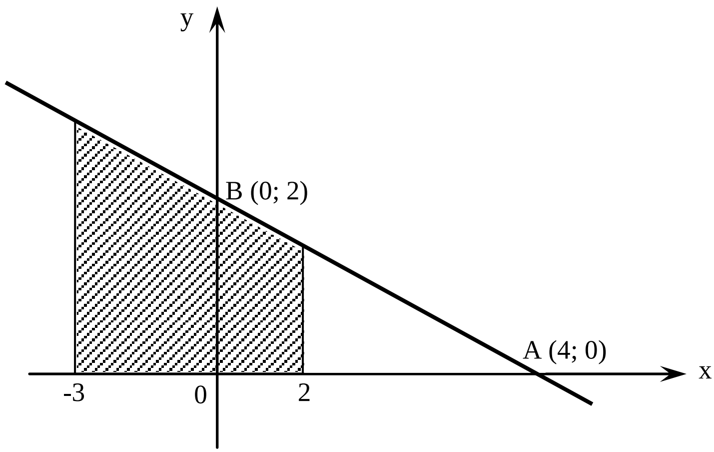
Примеры

Задание: Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1) $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$ и $x = 2$;

2) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 3$.

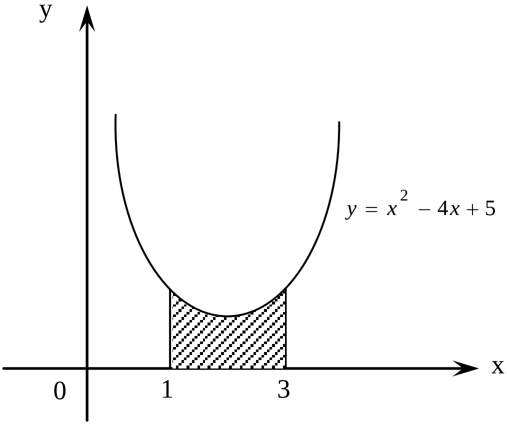
Решение: 1) Строим прямую $x + 2y - 4 = 0$ по двум точкам $A(4; 0)$ и $B(0; 2)$.



Выразим y через x, получим $y = -0,5x + 2$. Найдем площадь полученной фигуры:

$$S = \int_{-3}^{2} (-0,5x + 2)dx = \left(-0,25x^2 + 2x\right)\Big|_{-3}^{2} = 11,25$$

Ответ: $S = 11{,}25\ кв.\ ед.$



2) $y = x^2 - 4x + 5$ - квадратичная функция; $D(y) = R$; график – парабола, ветви направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$, отсюда следует, что $y = 4 - 8 + 5 = 1$. Таким образом, вершина параболы имеет координаты: $(2;1)$. Найдем площадь полученной фигуры:

$$S = \int_1^3 (x^2 - 4x + 5)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)\Bigg|_1^3 = (9 - 18 + 15) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 5\right) = 6 - 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S = 2\frac{2}{3}\ кв.\ ед.$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = -4x$, $x = -3$, $x = -1$ и осью абсцисс.
2. Найти площадь фигуры, заключенной между осями координат и прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $y = 4$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной ветвью гиперболы $y = -\frac{2}{x}$ и прямыми $x = 1$, $x = 5$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 3$ и осью абсцисс.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x + 3$, осями координат и прямой $x = 4$.
6. Найти площадь фигуры, заключенной между прямыми $y = 2x$, $y = 5x$, $x = 2$ и $x = 6$.
7. Найти площадь фигуры, отсекаемой от параболы $y = 3x - x^2$ прямой $5x - y - 8 = 0$.
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 16x$ и прямой $y = x$.
9. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y = 8x - x^2$ и $y = x^2 + 18x - 12$.
10. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = 6x^2$ и $y = 2x^3$.

Вопросы для самоконтроля:

1. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся над осью Ox?
2. По какой формуле вычисляется площадь фигуры прилегающей к оси Oy?
3. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся под осью Ox?
4. По какой формуле вычисляется площадь фигуры расположенной по обе стороны оси Ox?
5. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, ограниченной двумя пересекающимися кривыми?

Практическое занятие №15

Тема: Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Цель: Формирование навыков выполнения действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы
2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Комплексными числами называются числа вида $a+bi$, где a и b - действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2=-1$, называется *мнимой единицей*.

Запись комплексного числа в виде $z=a+bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Представление комплексного числа в виде $z=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r>0$, называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Произведение комплексных чисел $z_1=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ находится по формуле:

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

то есть

$$|z_1z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|,\ \arg(z_1z_2)=\varphi_1+\varphi_2.$$

Таким образом, *при умножении двух комплексных числе, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Частное комплексных чисел $z_1=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ находится по формуле:

$$\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

то есть

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ \arg\frac{z_1}{z_2}=\varphi_1-\varphi_2.$$

Таким образом, *при делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, аргументы вычитаются.*

При возведении комплексного числа $r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в n-ую степень используется формула

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n\in Z,$$

которая называется ф о р м у л о й М у а в р а .

Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа $r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула

$$z_k = \sqrt[n]{r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Степень e^z с комплексным показателем $z = x + yi$ определяется равенством

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Можно доказать, что

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$

то есть

$$e^{x+iy} = \cos y + i\sin y. \qquad (1)$$

В частности, при $x = 0$ получается соотношение

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,$$

которое называется ф о р м у л о й Э й л е р а .

Для комплексных показателей остаются в силе основные правила действий с показателями; например, при умножении чисел показатели складываются, при делении – вычитаются, при возведении в степень – перемножаются.

Показательная функция имеет период, равный $2\pi i$, то есть $e^{z+2\pi i} = e^z$. В частности, при $z = 0$ получается соотношение $e^{2\pi i} = 1$.

Тригонометрическую форму комплексного числа $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно заменить *показательной формой*: $z = re^{\varphi i}$.

Умножение, деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня целой положительной степени для комплексных чисел, заданных в показательной форме, выполняются по следующим формулам:

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}, \text{ где } k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Примеры

<u>Задание 1:</u> Выполните действия:

1) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$;

2) $10\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] : 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

<u>Решение:</u> 1) По формуле умножения комплексных чисел заданных в тригонометрической форме получим

$$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right] = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}.$$

2) По формуле деления комплексных чисел заданных в тригонометрической форме получим

$$10\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] : 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{10}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 5\cdot(0 + i) = 5i.$$

Задание 2: Возвести в степень $\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$.

Решение: По формуле Муавра получим

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=\cos\left[6\cdot\frac{\pi}{6}\right]+i\sin\left[6\cdot\frac{\pi}{6}\right]=$$

$$=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1.$$

Задание 3: Найти: 1) $e^{\frac{i\pi}{4}}$; 2) $e^{2+i\pi}$.

Решение: 1) По формуле Эйлера получим

$$e^{\frac{i\pi}{4}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

2) По формуле (1) получим $e^{2+i\pi}=e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^2$.

Задание 4: Найти: 1) z_1z_1; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_1^6, если $z_1=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$; $z_2=2e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

Решение: 1) По формуле умножения комплексных чисел, заданных в показательной форме получим

$$z_1z_1=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\cdot 2e^{-\frac{i\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{12}}.$$

2) По формуле деления комплексных чисел, заданных в показательной форме получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{-\frac{i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}-\left(-\frac{i\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}.$$

3) По формуле возведения комплексных чисел, заданных в показательной форме, в степень получим

$$z_1^6=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^6=8e^{\frac{i3\pi}{2}}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите произведение:

1) $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\right]$;

2) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot 5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

3) $(\cos 5+i\sin 5)\cdot(\cos 2+i\sin 2)$;

4) $\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

5) $\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

2. Выполните деление в тригонометрической форме:

1) $3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]:\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

2) $\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]:\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

3) $8\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]:4\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$;

4) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]:\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

3. Найдите:

1) e^{i}; 2) $e^{i\pi}$; 3) e^{1+i}; 4) $e^{\frac{i\pi}{2}}$;

5) $e^{\frac{i\pi}{3}}$; 6) e^{4+3i}; 7) e^{2-i}; 8) e^{3i-2}.

4. Дано $z_1=2e^{-i}$; $z_2=\frac{1}{2}e^{0,5i}$. Найдите

1) $z_1 z_1$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_1^3.

5. Решите уравнения:

1) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$;
2) $z^2 - 4iz + 6(2 - 5i) = 0$;
3) $z^2 - (8+3i)z + 13(1+i) = 0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Какие числа называются комплексно – сопряженными?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
5. Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
6. Как возводится в степень комплексное число, заданное в тригонометрической форме?
7. По какой формуле извлекается корень n-ой степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме?
8. Как записывается комплексное число в показательной форме?
9. Что называется тождеством Эйлера?
10. Какие действия выполняются над комплексными числами, заданными в показательной форме? Запишите формулы.

Практическое занятие №16

Тема: Переход от алгебраической формы к показательной и тригонометрической и обратно

Цель: Формирование навыков выполнения перехода от алгебраической формы комплексного числа к показательной и тригонометрической и обратно

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Запись комплексного числа z в виде $z = x + yi$ называется алгебраической формой комплексного числа. *Переход от алгебраической формы записи к тригонометрической и обратно осуществляется по формулам*

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad tg\varphi = tg(\arg z) = \frac{y}{x}\,;$$

$$x = r\cos\varphi\,; \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Для представления комплексного числа $z = x + yi$ в тригонометрической форме необходимо найти: 1) модуль этого числа; 2) одно из значений аргумента этого числа. В силу многозначности $\arg z$ тригонометрическая форма комплексного числа также неоднозначна.

Формула Эйлера $(e^{iy} = \cos y + i\sin y)$ устанавливает связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией. Заменив в ней y на φ и на $-\varphi$, получим

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,; \quad e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi\,.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим

$$\cos\varphi = \frac{(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})}{2}\,; \quad \sin\varphi = \frac{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})}{2i}\,.$$

Эти две простые формулы, также называемые формулами Эйлера и выражающие тригонометрические функции через показательные, позволяют алгебраическим путем получить основные формулы тригонометрии.

Примеры

<u>Задание 1:</u> Представить в тригонометрической форме числа:
1) $6i$; 2) $-2 + 2\sqrt{3}i$.

<u>Решение:</u> 1) Здесь $a = 0$, $b = 6$, $r = 6$. Поскольку вектор, изображающий число $6i$ лежит на положительной полуоси Oy, главное значение аргумента $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ поэтому

$$6i = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

или

$$6i = 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right], \quad k \in Z .$$

2) Здесь $a = -2$, $b = 2\sqrt{3}$, $r = 4$. Точка, изображающая число z, лежит во II четверти;

$tg\varphi = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Значит,

$$-2 + 2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

или

$$-2 + 2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right], \quad k \in Z .$$

Задание 2: Представить в алгебраической форме числа:

1) $z = 2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$; 2) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Решение: 1) Подставив значения $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$ в данное равенство, получим $z = 2(1 + i \cdot 0) = 2$.

2) Имеем

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -1 + i .$$

Задание 3: Представить в показательной форме числа:

1) $z = 2i$; 2) $z = -1 + i$.

Решение: 1) Здесь $a = 0$, $b = 2$, $r = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. По формуле $z = re^{\varphi i}$ получим $z = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$.

2) Здесь $a=-1,\ b=1,\ r=\sqrt{2}$, $tg\varphi=-1,\ \varphi=\dfrac{3\pi}{4}$. По формуле $z=re^{\varphi i}$ имеем $z=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

1) $3i$; 2) $-1+i$; 3) $1-i\sqrt{3}$;

4) $\sqrt{3}-i$; 5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$; 6) $-3+4i$;

7) $(\sqrt{5}-2i)$; 8) $16-16\sqrt{3}i$; 9) $2+\sqrt{3}i$.

2. Представьте в алгебраической форме числа:

1) $5\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$; 2) $4\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$;

3) $\cos\pi+i\sin\pi$; 4) $2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$;

5) $-\sqrt{2}i\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$; 6) $3(\cos 0+i\sin 0)$.

3. Представьте в показательной форме числа:

1) 1; 2) $\sqrt{3}+i$; 3) $3+i\sqrt{3}$;

4) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; 5) $2+2i$; 6) $-1-\sqrt{3}i$.

4. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

1) $5e^{1,5i}$; 2) $2e^{0,5i}$; 3) $3e^{-i}$.

5. Найдите действительные числа a и b, такие, чтобы выполнялись равенства:

1) $\dfrac{2i}{a}-bi+4=3i-\dfrac{7}{a}+2b$;

2) $(1+i)a+(1-i)b=3-i$;

3) $(2+3i)a+(2-3i)\cdot(a+b)=7-8i$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Как осуществляется переход от записи комплексного числа, заданного в алгебраической форме, к его тригонометрической форме?
2. Как осуществляется переход от записи комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, к его алгебраической форме?
3. Как осуществляется переход от записи комплексного числа, заданного в алгебраической форме, к его показательной форме и обратно?